TS6	Devoir n°5	à remettre le lundi 11 décembre

Dérivabilité

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de continuité de f
2. À l'aide du taux d'accroissement, étudier la dérivabilité de f en 0 et en -1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu
3. En utilisant les opérations sur la dérivée, calculer la dérivée pour tout x du domaine différent de 0 et de -1. Étudier le signe de la dérivée, construire le tableau de variation de f.

Méthode d'Euler

On cherche à déterminer, grâce à la méthode d'Euler une approximation de la fonction f vérifiant $f'(x) = x$ et $f(0) = -2$. Soit h un réel, on considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 0$, $y_0 = -2$ et pour tout entier n, $x_{n+1} = x_n + h$ et $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)$

1. Expliquer pourquoi y_n est une bonne approximation de $f(x_n)$ (raisonner par récurrence avec la méthode d'Euler)
2. Déterminer x_n en fonction de n et h
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $y_n = -2 + \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$
4. Pour tout réel x, on pose $h = \dfrac{x}{n}$ et on note $f_n(x) = y_n$. Exprimer $f_n(x)$ en fonction de x et n
5. Expliquer pourquoi $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. En déduire $f(x)$

Complexes - Amérique du nord 2006